INSEA

Institut National de Statistique
Et d'Economie Appliquée
I.N.S.E.A - Rabat

Concours d'Accès en Première Année
Cycle des Ingénieurs d'Etat
2012-2013

Date : **17-07-2012** Epreuve : **Algèbre** Durée : 1 H 30 mn

Notations et rappels :

a) $M_n(K)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps K=(R ou C) et I_n la matrice unité.
b) K[X] désigne les polynômes à une indéterminée à coefficients dans K.
c) Pour tout $p(X) \in K[X]$ et tout $A \in M_n(K)$, on pose :
$p(A)=a_kA^k + a_{k-1}A^{k-1}+.....+ a_1A + a_0I_n$; où $p(X) =a_kX^k+a_{k-1}X^{k-1}+.....+a_1X+a_0$.
d) Pour tout $A \in Mn(K)$ on pose $K[A]=\{ p(A), p(X) \in K[X] \}$
e) Pour tout $A \in Mn(K)$, on note adj(A),la matrice qui vérifie :
$A.adj(A)=adj(A).A = det(A).I_n$

Questions:

1) Soit $A \in M_n(K)$, en considérant l'application définie par :

$f: p(X) \in K[X] \rightarrow p(A) \in K[A]$. Montrer qu'il existe un polynôme

$m_A(X)$, de degré minimal, unitaire et unique qui divise tout autre polynôme p(X) , qui vérifie la condition p(A) = 0.

2) Montrer que si A est une matrice diagonale par bloc, c'est-à-dire,

$A= diag(A_1,A_2)$ .Alors $m_A(X)= PPCM(m_{A1}(X) ; m_{A2}(X))$.

3) Montrer que Si α est une valeur propre de la matrice A , alors $p(\alpha)$ est une valeur propre de p(A).

4) Soit $\Delta_A(x) = det(xI_n - A) = x^n + a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x + a_0$;le polynôme

caractéristique de la matrice A. Soit $B(x)= adj(xI_n - A)$.

a)Montrer que $B(x)=x^{n-1}B_{n-1}+x^{n-2}B_{n-2}+.....+xB_1+B_0$ où les B_j sont des matrices carrées d'ordre n pour j$\in \{0,1,.....,n-1\}$.

b) Etablir les égalités suivantes :

$B_{n-1} = I_n$

$B_{n-2} - AB_{n-1} = a_{n-1}I_n$

$B_{n-3} - AB_{n-2} = a_{n-2}I_n$

.....

.....

$B_0 - AB_1 = a_1I_n$

c) En utilisant (b),montrer que $\Delta_A(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+.....+a_1A+a_0I_n=0$